Geogebra como recurso didáctico para la comprensión y aplicación de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner

Teodoro Almérico Ávalos[1] | Alejandro Cruzata Martínez[2]

Resumen

El artículo presenta los principales resultados de una investigación aplicada proyectiva que estudió la comprensión y aplicación de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner en los estudiantes de secundaria de la Institución Educativa "Ernesto Diez Canseco" para lo cual se asumió el paradigma interpretativo con enfoque cualitativo educacional. Se trabajó con una muestra de 39 estudiantes de cuarto grado, elegidos con la técnica de grupos intactos. Para recoger los datos se utilizaron una prueba escrita, entrevista y análisis documental. Los resultados evidencian que los estudiantes no grafican correctamente la circunscripción de las figuras y tienen dificultades para establecer la relación aritmética del enunciado de los teoremas y para la demostración de los mismos. Como contribución a la solución de las dificultades identificadas se propone una estrategia didáctica basada en el empleo del software educativo *GeoGebra* y un modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

Summary

The article presents the main results of an investigation applied projective. In her it was studied the understanding and application of the theorems of Pitot, Poncelet and Steiner in the students of secondary of the Educational Institution "Ernesto Ten Canseco" for that which the interpretive paradigm was assumed with educational qualitative approach. One worked with a sample of 39 students of fourth grade, elects with the technique of intact groups. To pick up the data they were used a written test, he/she interviews and documental analysis. The results evidence that the students don't represent the district of the figures correctly and they have difficulties to establish the arithmetic relationship of the one enunciated of the theorems and for the demonstration of the same ones. As contribution to the solution of the identified difficulties intends a didactic strategy based on the employment of the educational software GeoGebra and in model of geometric reasoning of Van Hiele.

Palabras clave: Comprensión - Teoremas - Estrategia Didáctica - Software *GeoGebra.*

Key words: Understanding - Didactic Strategy - Theorem - Software *GeoGebra.*

Fecha de recepción: 10/06/16
Primera Evaluación: 27/07/16
Segunda Evaluación: 30/8/16
Fecha de aceptación: 30/8/16

Introducción

La educación es un proceso complejo y como tal es un fin para el desarrollo integral de la persona, de la misma forma, es un derecho donde todos tenemos iguales oportunidades de acceso. En la actualidad la educación está pasando por cambios que buscan mejorar el aprendizaje, en este marco, el Ministerio de Educación de Perú (2015) propone políticas educativas que promueven el aprendizaje por competencias con un currículo desde los enfoques pedagógicos constructivistas. En esta misma línea, proponen para el área de matemática un enfoque centrado en la resolución de problemas, para lo cual emite las Rutas de Aprendizaje 2015, donde están plasmados los mapas de progresos por ciclos, las competencias, capacidades e indicadores como componentes del aprendizaje.

Con el mismo propósito del Ministerio de Educación, esta investigación encaminó el tratamiento del problema de la comprensión de los teoremas y propiedades geométricas, específicamente en la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, en los estudiantes del cuarto grado de la Institución Educativa "Ernesto Diez Canseco", jurisdicción de la Unidad de Gestión Educativa Local "Daniel Alcides Carrión", Dirección Regional de Educación Pasco, donde los estudiantes tienen dificultad en comprender los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner. Esto se evidencia, cuando los estudiantes no pueden resolver problemas que involucran los teoremas mencionados, además no demuestran los teoremas.

Consideramos que el problema de la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner radica en los temas prerrequisitos, considerados como conocimientos previos, las cuales son; rectas tangentes, teorema de tangente, polígonos circunscrito y exinscrito a la circunferencia, donde los estudiantes no comprendieron estos temas.

La investigación se desarrolló en la Institución Educativa "Ernesto Diez Canseco", ubicada en el distrito de Yanahuanca, provincia de Daniel Carrión, Región Pasco, jurisdicción de la Unidad de Gestión Educativa Local "Daniel Alcides Carrión", con estudiantes del cuarto grado secciones C y D, conformado por 39 estudiantes.

Esta investigación se desarrolló en un contexto educativo, por tanto el objeto de estudio el proceso de enseñanza y aprendizaje, y el campo de estudio es la comprensión.

Antecedentes

En el Perú

Maguiña (2013), realizó un estudio cuyo propósito fue diseñar una propuesta didáctica, según el modelo Van Hiele, para promover que los estudiantes del cuarto grado de secundaria alcancen el nivel 3. El estudio concluyó que la propuesta didáctica diseñada para la enseñanza de los cuadriláteros, basado en el modelo de Van Hiele y con ayuda del software GeoGebra, ha logrado que los estudiantes incrementan los grados de adquisición en el nivel de reconocimiento pasando de un grado de adquisición intermedia a un grado de adquisición alta respecto al objeto matemático cuadrilátero.

Santos (2014), realizó un estudio cuyo propósito fue determinar los niveles de razonamiento alcanzados por los estudiantes de segundo grado de secundaria, según el modelo Van Hiele, cuando abordan situaciones que involucran elementos de la circunferencia, usando como mediador el software GeoGebra, cuyo estudio concluyó que la propuesta didáctica diseñada permitió que los estudiantes logren un grado de adquisición alto en el nivel 1, un grado de adquisición intermedio del nivel 2 y se encuentra teniendo indicios de pertenecer al nivel 3 de adquisición todos respecto a la comprensión de la circunferencia, el uso del software permitió que los estudiantes determinen y enuncien las propiedades geométricas, así como su redefinición o la ampliación de algunas afirmaciones.

Entre los antecedentes internacionales tenemos las investigaciones, realizadas por los siguientes autores:

Vásquez (2013), desarrolló una Tesis de maestría, cuyo propósito fue diseñar una estrategia didáctica para acelerar el paso entre niveles de Van Hiele, utilizando el GeoGebra; el estudio se realizó en Colima México, el estudio concluyó que el GeoGebra es un software de Geometría Dinámica que posibilita alcanzar el aprendizaje esperado, además se observó que el software agiliza el tránsito total y parcial de los estudiantes desde un nivel de razonamiento geométrico al inmediato superior.

García (2011), realizó un estudio, cuyo propósito fue diseñar una secuencia de enseñanza aprendizaje basada en el uso del software GeoGebra, donde concluye; el GeoGebra es un programa de muy fácil manejo, que requiere poco tiempo para familiarizarse con las herramientas que ofrecía y cuyos atributos y ventajas respecto a métodos tradicionales de lápiz y papel se pusieron de relieve en todo momento.

Pérez y Eugenia (2010), realizó un estudio, cuyo propósito fue diseñar estrategias lúdicas aplicando el modelo de Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la Geometría en los alumnos del séptimo grado de educación básica, el estudio concluyó que las actividades diseñadas en las realidades didácticas dirigidas a través de juegos, llevaron a los estudiantes hacer representaciones esenciales y análisis de lo observado en el plano y en el espacio, en este sentido, los estudiantes estuvieron en la capacidad de visualizar, analizar, clasificar y resolver problemas sencillos sobre lo que aprendieron, alcanzando un nuevo vocabulario. Además desarrollaron un nivel de pensamiento geométrico logrando uno de los objetivos, planteados.

Año 7 Nº9 | 2016
pp. 271-296

Marco Teórico

La comprensión es entendida como proceso mental, cuando nuestra atención es referida a la mente del estudiante, los enfoques cognitivos de la didáctica de la matemática, en el fondo entienden la comprensión como proceso mental (Font, 2007). La afirmación que realiza Font, referente a la definición de comprensión, consideramos como punto de partida para el estudio de la comprensión en esta investigación.

La definición que sustenta el autor, referente a la comprensión como creación mental, desde el enfoque cognitivo es parte del proceso mental, bajo estas premisas expresamos que la comprensión es un proceso mental, donde se crea imágenes del mensaje que se quiere transmitir, a este proceso se conoce como la creación mental y esta se transforman en un desempeño flexible al relacionar, operar, describir, comparar, diferenciar, adecuar, relatar, diagramar, analizar, decidir, representar, secuenciar, organizar, etc.

Sobre la comprensión en geometría es necesario reconocer el papel de las estructuras perceptivas. Al respecto, Van Hiele (1957), expresa:

> Al formarse la comprensión geométrica nos encontramos por tanto con tres estructuraciones: una estructuración perceptiva, una estructuración lingüística y una estructuración lógica. En parte se complementan pero a la larga la última acaba desbancando a la perspectiva y la lingüística. Llegado el caso puede ocurrir que una palabra o más tarde un símbolo evoque alguna representación perceptiva aunque esto se irá produciendo cada vez con menos frecuencia según se vaya automatizando la acción. Así pues, el lenguaje tiene en cierta manera la función de intermediario. Según se progresa en geometría se elimina cada vez más el lenguaje, de manera que se pasa directamente de la estructuración perceptiva a la simbología sin haber usado el lenguaje. (pp. 29-30)

Desde nuestra perspectiva y en base a las fundamentaciones anteriores expresamos que, la comprensión en geometría se inicia cuando se presenta actividades de exploración, que moviliza los conocimientos previos con un nivel de compresión básico, mostrando como desempeños las acciones de clasificar, diagramar, relatar, comparar, diagramar, etc.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, es un modelo matemático, cuyos autores son; Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele, quienes presentaron el modelo en la Universidad de Utrecht Crowley, en 1987. Desde este modelo matemático, podemos desarrollar la comprensión, según Corberán et al. (1994), el centro de atención del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, no es el aprendizaje de hechos y destrezas, sino la comprensión de conceptos y el perfeccionamiento de las formas de razonamiento.

De lo que manifiesta Corberán, estamos de acuerdo, porque para comprender se necesita en muchos casos razonar y para razonar se necesita comprender, en ese sentido estamos seguros que, al diseñar la estrategia didáctica orientado por el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, en desarrollar la compresión y aplicación de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner.

El modelo Van Hiele, presenta dos aspectos: descriptivo, donde se identifican las formas de razonamiento geométrico y los desempeños como muestra de progreso; e instructivo, con pautas a seguir por el docente para favorecer el perfeccionamiento del razonamiento geométrico (Jaime, 1993).

Niveles de razonamiento geométrico del modelo Van Hiele.

En cuanto se refiere a los niveles de razonamiento geométrico según el modelo Van Hiele, en esta investigación se utilizará los niveles descritos por Jaime (1993), la cual se describen a continuación:

Nivel 1 (Reconocimiento o visualización). Comprende las siguientes características:

Percepción global de las figuras: se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.

Percepción individual de las figuras: cada figura es considerada como un objeto, independiente de otras figuras de la misma clase. No se generalizan las características de una figura a otras de su misma clase.

Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas físicas.

Frecuentemente hay descripciones por semejanza con otros objetos, no necesariamente matemáticos: "Se parece a…", "tiene forma de…".

Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar, caracterizar figuras, con frecuentes referencias a prototipos visuales.

Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, describirlas, etc.

No se suelen reconocer explícitamente las partes de que se componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Cuando sí se hace dicho reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, reflejan contradicciones.

Nivel 2 (Análisis). Comprende las siguientes características:

Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras. Deducción de propiedades mediante experimentación. Capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma familia. La definición de un concepto consiste en el recitado de una lista de propiedades, lo más exhaustiva posible, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias. Asimismo, se rechazan las definiciones dadas por el profesor o el libro de texto en favor de la del estudiante cuando aquéllas entran en conflicto con la propia.

No se relacionan diferentes propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras. No se establecen clasificaciones a partir de las relaciones entre las propiedades.

La demostración de una propiedad se realiza mediante su comprobación en uno o pocos casos.

Nivel 3 (Clasificación o abstracción). Comprende las siguientes características:

Sí se pueden relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: se comprende la existencia de relaciones y se descubren, de manera experimental, nuevas relaciones.

Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. También se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.

La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay una necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.

Comprensión de una demostración realizada por el profesor. Capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga. Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.

Nivel 4 (Deducción formal). Comprende las siguientes características:

Se pueden reformular enunciados de problemas o teoremas, trasladándolos a un lenguaje más preciso.

Realización de las demostraciones mediante razonamientos deductivos formales.

Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones.

Capacidad para comprender la estructura axiomática de las matemáticas: Sentido de axiomas, definiciones, teoremas, etc.

Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

Nivel 5 (Rigor). Comprende las siguientes características:

Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos distintos del usual (de la geometría euclídea).

Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.

Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia. Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

En esta investigación, sólo se trabajará hasta el nivel 4, por las características de los objetivos planteados y del problema en estudio.

Las características de los niveles descritos son fundamentales, para ubicar a los estudiantes en el nivel de razonamiento geométrico correspondiente. En esta investigación el propósito es alcanzar la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner con un grado de adquisición completa en el nivel 3 y alta en el nivel 4.

El grado de adquisición en cada nivel, es el grado progresivo de un nivel de razonamiento, se puede hablar en términos cualitativos, de un proceso de dominio cada vez mayor del nivel, desde el dominio nulo (al comienzo del proceso) hasta el completo (al final del proceso), con una serie de situaciones intermedias con características propias (Jaime, 1993).

Los niveles de razonamiento geométrico de acuerdo al modelo Van Hiele se logran con las fases, éstas son tareas propias del docente. Propone cinco fases, las cuales son descritas por Jaime (1993), de la siguiente manera.

Fase 1 (Información). Las tareas a cumplir son las siguientes:

En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo tema objeto de estudio.

El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en el mismo.

Los estudiantes deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán.

Fase 2 (Orientación Dirigida). Las tareas a cumplir son las siguientes:

Se guía a los estudiantes mediante actividades y problemas (dados por el profesor o planteados por los mismos estudiantes) para que éstos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicas de la red de conocimientos que deben formar.

Los problemas propuestos han de llevar directamente a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Fase 3 (Explicitación). Las tareas a cumplir son las siguientes:

Los estudiantes deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.

Fase 4 (Orientación Libre). Las tareas a cumplir son las siguientes:

En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.

El profesor debe proponer a sus alumnos problemas que no sean una simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna. Por otra parte, el profesor debe limitar al máximo su ayuda a los estudiantes en la resolución de los problemas.

Fase 5 (Integración). Las tareas a cumplir son las siguientes:

Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

El profesor debe dirigir resúmenes o recopilaciones de la información que ayuden a los estudiantes a lograr esta integración. Las actividades que les proponga no deben implicar la aparición de nuevos conocimientos, sino sólo la organización de los ya adquiridos.

Estos niveles y fases se concretan en la estrategia didáctica de la clase de Matemáticas. La estrategia didáctica es la integración de actividades, prácticas pedagógicas, métodos y recursos, en diferentes momentos del proceso de enseñanza aprendizaje (Velasco y Mosquera, 2010).

Asumimos la estrategia didáctica como el conjunto de actividades, prácticas pedagógicas, métodos y recursos, que se selecciona con la finalidad de llevar a cabo un proceso de enseñanza aprendizaje. En una actividad pedagógica la estrategia didáctica se concreta en las estrategias de enseñanza y aprendizaje

Las actividades de la estrategia se diseñaron a partir del empleo del software educativo GeoGebra. Es un software que combina perfectamente el álgebra y la geometría dinámica, con potencialidades de aplicación, en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, permitiendo a los estudiantes interactuar el objeto matemático con el software y a los docentes permite aplicar en todo momento y en todos los grados. El autor de este software catalogado por muchos como el mejor software educativo es Markus Hohenwarter, quién en el 2002 presentó en la universidad Salzburgo, en Austria.

Se conoce que un software es un instrumento y puede ser transformado en herramientas pedagógicos eficaces por el docente y como recurso de aprendizaje para el estudiante, con el fin de aplicarlo con efectividad en la resolución de situaciones matemáticas. En esta misma perspectiva un software puede ser transformado en un recurso didáctico acorde a los fines educativos propuestos, Guin y Trouche (1999).

El proceso de cambio de un software a otros propósitos se denomina Génesis Instrumental, (Trouche, 2003). Este mismo autor, hace entender que el mismo software GeoGebra, puede ser adaptado en varios propósitos de acuerdo a las intenciones del usuario y la tarea a resolver, producto de este proceso el software se convierte en un recurso didáctico eficaz, capaz de incursionar en el proceso de enseñanza aprendizaje con resultados eficientes.

Metodología

Esta investigación se desarrolló bajo el paradigma interpretativo, el enfoque asumido es cualitativa educacional de tipo aplicada proyectiva.

Las categorías identificadas para el estudio fueron: comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, la estrategia didáctica y el recurso didáctico, las cuales fueron diagnosticadas y los datos obtenidos fueron procesadas.

Para recoger los datos se utilizaron las técnicas de prueba escrita, entrevista y análisis documental; los instrumentos utilizados fueron; prueba mixta, prueba de desarrollo, ficha de análisis documental y guía de entrevista para el docente.

Prueba mixta. La finalidad de este instrumento fue identificar el grado de adquisición por nivel, para ello estructuramos 10 ítems, distribuidos de la siguiente manera: los ítems 1, 2 y 3 son objetivas y fueron planteadas para identificar las características del nivel 1 del modelo Van Hiele, a través de los siguientes indicadores; identifica rectas tangentes, aplica el teorema de tangentes e identifica los puntos de tangencia; los ítems 4, 5 y 6 son ítems abiertas y fueron propuestos para identificar las características del nivel 2, a través de los siguientes indicadores; identifica figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, describe las propiedades de cuadriláteros exinscritas a la circunferencia, argumenta propiedades de figuras geométricas circunscritas a la circunferencia; los ítems 7, 8 y 9 son ítems abiertas, fueron propuestos para identificar las características del nivel 3, a través del indicador; establecen relación aritmética del teorema de Pitot, Poncelet y Steiner; los ítems 10, 11 y 12 son ítems abiertas, fueron propuestas para identificar las características del nivel 4, a través de los indicadores; demuestran los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner

Prueba de desarrollo, la finalidad de este instrumento fue identificar las características de los niveles a partir de las respuestas, para lo cual se formularon 12 ítems, a partir de los resultados por las características identificas se ubica al nivel correspondiente, este proceso de análisis arrojó dos tipos de resultados; una respuesta cuantitativa, producto del procesamiento de los niveles identificados, el segundo resultado cualitativa, producto del análisis de las características de cada respuesta, el resultado final cualitativo se obtuvo por regularidades identificadas en las respuestas.

Ficha de análisis documental. Este instrumento se elaboró con la finalidad de registrar las observaciones encontradas respecto a las actividades desarrolladas por el estudiante y propuestas por el docente, a partir de esta observación identificada ubicamos al nivel correspondiente según las características encontradas. El resultado final logrado por cada nivel sirvió para contrastar con los resultados de los dos instrumentos anteriores.

Guía de entrevista para el docente. Este instrumento se utilizó para recoger información directa del docente, para lo cual se establecieron 12 ítems con la finalidad de identificar; las causas de la baja comprensión, de qué manera los recursos educativos viabilizan la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, y qué consideraciones se debe tener en cuenta para desarrollar la compresión de los teoremas en referencia.

Referente al procesamiento de datos se cumplieron las siguientes tareas:

En el instrumento prueba mixta, en primer lugar se estableció las características de los tipos de respuestas, para luego clasificar por tipos y con estos datos se formó una base de todos en Excel y estos datos fueron copiados al software *Statistical Package for the Social Sciences (SPSS)* para su procesamiento respectivo, cuyo resultado obtenido es el grado de adquisición en el nivel respectivo del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele.

En el instrumento prueba de desarrollo, se inició con el análisis cualitativo, para lo cual comparamos cada respuesta con las características de los niveles de Van Hiele, así ubicamos en el nivel correspondiente, con los datos formamos una base de datos en Excel, cuya comparación y clasificación se hizo por regularidades de las respuestas. Obteniendo los resultados con características de cada nivel.

Para el análisis de las pruebas con respuestas abiertas se utilizó las características de las repuestas y el grado de adquisición, utilizado por Jaime (1993) quien señala que este tipo de respuestas son aplicables a ítems de respuestas libres; estas preguntas pueden ser contestadas en distintos niveles de Van Hiele, por lo que al momento de evaluar una respuesta, primero se debe determinar el nivel de razonamiento en que es respondida y después se debe analizar la calidad de la respuesta, desde una perspectiva del nivel que se considera, teniendo en cuenta tanto su precisión matemática cómo el empleo del nivel de razonamiento en cuestión. Para la ponderación de cada tipo de respuestas, se trabajó con la utilizada por Jaime (1993), quien asigna a cada tipo de respuestas un valor en el intervalo de 0 a 100.

Como las respuestas pueden ser clasificadas en diferentes niveles, para determinar el grado de adquisición alcanzado por los estudiantes, se calculó la media aritmética de las ponderaciones asignadas a cada uno de los niveles asignados.

Referente al grado de adquisición, Jaime (1993) clasifica en cinco grados de adquisiciones; Adquisición nula, indica que la comprensión no ha sido desarrollada.

Adquisición baja, indica que la comprensión es desarrollada con dificultades.

Adquisición intermedia, comprensión matemática en nivel medio.

Adquisición alta, indica que la comprensión matemática está en el nivel argumentativo. Adquisición completa, indica que la comprensión está en el nivel interpretativo.

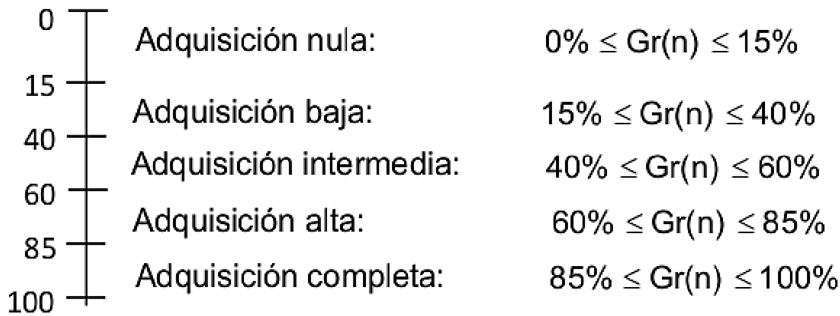

Fig. 1. Escala referente al grado de adquisición de la comprensión
Fuente: Jaime (1993)

En el instrumento ficha de análisis documental, se elaboró una base de datos empleando la aplicación *Microsoft Excel*, luego estos datos fueron copiados al SPSS 22 para el procesamiento respectivo, los resultados obtenidos indican la ubicación de los estudiantes por nivel de razonamiento geométrico del modelo Van Hiel.

En el instrumento guía de entrevista para el docente, se acopió el audio de la entrevista, luego los datos se analizaron con el programa Atlas ti., obteniendo las redes semánticas en tres dimensiones; causas de la baja comprensión en el proceso de enseñanza aprendizaje, las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) en el proceso de enseñanza aprendizaje, comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner.

Resultados, análisis e interpretación

Prueba mixta

Nivel 1. Según la repuesta entregado por los alumnos, las respuestas promedios corresponden a un grado de adquisición del 50,43%, obteniendo adquisición intermedia, esto indica que la mayoría de los estudiantes identifican las rectas tangentes a la circunferencia como rectas secantes, la mayoría consideran que las rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son diferentes, los estudiantes consideran los puntos de tangencia con puntos de intersección.

Correspondiente al indicador identifica rectas tangentes a la circunferencia, la mayoría de los estudiantes consideran como rectas secantes, este error es debido a que los estudiantes no llegaron comprender analíticamente las propiedades de las rectas tangentes;

respecto al indicador describe el teorema de tangente, la mayoría respondieron que las tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son diferentes; con respecto al indicador identifica los puntos de tangencia entre la recta y la circunferencia, la mayoría de los estudiantes confunden puntos de intersección con puntos de tangencia, literalmente son iguales, pero matemáticamente difieren, un punto de tangencia es el único punto de intersección de la recta con la circunferencia. El resultado arroja que la mayoría de los estudiantes no identifican correctamente el punto de tangencia.

Nivel 2. Las respuestas promedios corresponden a un grado de adquisición del 40,62%, obteniendo la adquisición intermedia, esto indica que los estudiantes identifican las figuras circunscritas a la circunferencia por puntos de intersección y no por rectas tangentes, los estudiantes describe la exinscripción de un cuadrilátero cuando esta se ubica fuera de la circunferencia sin puntos de tangencia, los estudiantes argumentan que un cuadrilátero está circunscrito a la circunferencia cuando todos sus lados intersectan a la circunferencia.

Correspondiente al indicador identifica figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, tienen dificultad en identificar porque los estudiantes reconocen por puntos de intersección y no por rectas tangentes, al identificar por puntos de intersección los estudiantes afirman que el polígono puede circunscribir o inscribir a la circunferencia, pero, si identifican por rectas tangentes queda determinado que el polígono circunscribe a la circunferencia; referente al indicador describe las propiedades de cuadriláteros exinscritas a la circunferencia, los estudiantes en primer lugar no entiende el término exinscrito, llegan a la conclusión que un cuadrilátero es exinscrito a la circunferencia cuando está fuera de la circunferencia y cuando sus lados no chocan con la circunferencia, a partir de este preconcepto describe las propiedades, la cual lógicamente es erróneo; referente al indicador argumenta propiedades de polígonos circunscritas a la circunferencia, los estudiantes por la misma dificultad que tiene en reconocer puntos de tangencia, se limita en argumentar cuando una figura está circunscrita a la circunferencia, un mínimo porcentaje de los estudiantes manifiestan que un cuadrilátero es circunscrito a la circunferencia cuando sus cuatro lados intersectan a la circunferencia, el concepto está bien lo que falta afirmar es el punto de tangencia, entonces se afirma que un cuadrilátero es circunscrito a la circunferencia cuando sus lados es tangente a la circunferencia.

Nivel 3. Las respuestas promedios corresponden con un grado de adquisición del 32,66%, obteniendo adquisición baja, esto indica que los estudiantes no llegan comprender el enunciado de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, por tanto no llegan determinar la relación aritmética a partir de las medidas de las rectas tangentes.

Referente al indicador, establece la relación aritmética del teorema de Pitot, Poncelet y Steiner a partir del enunciado, los estudiantes en su mayoría no comprendieron los enunciados de los teoremas, por esta razón no establecieron la relación aritmética a pesar de que las medidas de las tangentes trazas del vértice estuvieron en la gráfica.

Nivel 4. Las respuestas promedios corresponden con un grado de adquisición del 4,47%, obteniendo adquisición nula, esto indica que los estudiantes no intentan realizar la demostración, no saben por dónde empezar, porque tuvieron dificultad en establecer la relación aritmética.

Referente al indicador, demuestra los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner a partir de la expresión algebraica del enunciado, en su totalidad no establecieron la relación algebraica, porque los estudiantes tuvieron dificultad en representar la relación aritmética a partir del enunciado.

Prueba de desarrollo

Nivel 1. En cada ítem con mucha frecuencia los estudiantes se ubican en este nivel, mostrando las siguientes características; utilizan un lenguaje básico tales como; chocan, un solo punto, una figura está dentro de otra figura, la circunferencia no coincide completamente con el polígono. Perciben la figuras de manera global, no se puede reconocer explícitamente las partes que componen una figura, producto de ello no justifican cuando un polígono está circunscrito a la circunferencia y cuando está exinscrito. La construcción lo realiza de manera global, sin tener en cuenta las pautas, consecuencia de ello, no logran establecer las relaciones de igualdad que a partir de ello se establezca las relaciones algebraicas de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, En conclusión tienen un grado de adquisición promedio de 49,84 %, la cual indica una adquisición intermedia.

Correspondiente al indicador identifica rectas tangentes, los estudiantes identifican las rectas tangentes utilizando el lenguaje como; chocan en un solo punto, la recta y la circunferencia coinciden en un punto, se intersectan en un solo punto, estas respuestas matemáticamente es correcta, pero incompleta, porque el término chocar es totalmente diferente al término intersectar y éstos diferente al término punto de tangencia; referente al indicador, aplica el teorema de tangente, la mayoría de los estudiantes obtuvieron medidas desiguales, esto demuestra que trabajar con regla y compas no es precisa en cuanto se refiere a la obtención de medidas en las gráficas, esto, a larga en los estudiantes crea duda, incomprensión, por esta razón respondieron que las tangentes trazadas desde un punto exterior son diferentes pero la teoría explica que son iguales; con respecto al indicador, identifica los puntos de tangencia, el estudiante en sus gráficas muestran, al trazar rectas tangentes la ubicación del punto de tangencia no es precisa, se ha visto

Año 7 Nº9 | 2016
pp. 271-296

casos que ponen hasta dos puntos en la intersección de la recta con la circunferencia. Con esto se demuestra que trabajar con regla y compas no garantiza la comprensión de temas geométricos.

Nivel 2. En cada ítem con regular frecuencia los estudiantes se ubican en este nivel, mostrando las siguientes características; Reconocen a las figuras por sus elementos básicos. Reconocen propiedades, pero al comprobar se contradicen, deduce propiedades y no justifica. Reconoce las figuras utilizando un lenguaje matemático apropiado. No distinguen entre un polígono y circunferencia, al decir que se intersectan entre los lados de la circunferencia y el cuadrilátero. Realizan la construcción de figuras circunscritas y exinscritas a la circunferencia. Trata de establecer la demostración de teoremas planteando sólo la relación aritmética. En conclusión tienen un grado de adquisición promedio de 20,35% %, la cual indica una adquisición baja.

Correspondiente al indicador identifica figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, el estudiante no está seguro que realmente es la figura requerida, porque al momento de ubicar los puntos de tangencia lo hace por cumplimiento, se ha podido observar, que la gráfica de las rectas tangentes es secante, en mucho de los casos no hay puntos de tangencia, de allí, el reconocimiento de figuras circunscritas lo realiza con errores; referente al indicador describe propiedades de figuras geométricas exinscritas a la circunferencia, la gráfica que presentan están de acuerdo a los preconceptos que manejan, la circunferencia y el cuadrilátero no presentan puntos de tangencia, por tanto es difícil que el estudiante describa las propiedades. Esto se refleja en las respuestas emitidas; referente al indicador argumenta propiedades de figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, la mayoría de los estudiantes no argumentan, porque la gráfica que obtuvieron realmente no representan figuras circunscritas.

Nivel 3. En cada ítem, con poca frecuencia los estudiantes se ubican en este nivel, mostrando las siguientes características; Definen correctamente el teorema de tangentes. Construye rectas tangentes, utilizando las pautas, sólo que no justifica su respuesta. Definen correctamente conceptos y tipos de figuras. Justifica su respuesta utilizando un lenguaje formal, como punto de tangencia. Establecen las relaciones algebraicas de lo teoremas al intentar demostrar. En conclusión tienen un grado de adquisición promedio de 5,52 %, la cual indica una adquisición nula.

Referente al indicador, establece la relación aritmética del teorema de Pitot, Poncelet y Steiner, la mayoría de los estudiantes obtuvieron una gráfica con las medidas de las rectas tangentes diferentes, porque el error estuvo desde la ubicación del punto de tangencia, la construcción de la circunferencia inscrita se realizó de manera empírica, sin tópicos correctos, por ello los puntos de tangencia están ubicados en lugar inadecuado, las causas posibles pueden ser la aplicación de una estrategia de enseñanza memorística, desconocimiento de tópicos para la construcción de figuras circunscritas y exinscritas, por ello la mayoría de los estudiantes no establecieron la relación aritmética de los enunciados de los teoremas en mención.

Nivel 4. En cada ítem, con muy poca frecuencia los estudiantes se ubican en este nivel, mostrando las siguientes características; construyen las rectas tangentes según las pautas, justificando su respuesta, bajo la definición de rectas tangentes. Demuestra la tangencia del cuadrilátero exinscrito por las proyecciones de sus lados. La construcción de cuadrilátero circunscrito es correcta y establece la relación de igualdad. Representa algebraicamente las premisas del teorema y demuestran partiendo de uno de las premisas. En conclusión tienen un grado de adquisición promedio de 0,27 %, la cual indica una adquisición intermedia.

Referente al indicador, demuestra los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, los estudiantes en su mayoría no pudieron establecer la representación algebraica del enunciado de los teoremas, esto demuestra que los estudiantes tienen dificultad de representar el lenguaje literal al lenguaje algebraico, y lógicamente por esta razón ni siquiera intentan iniciar la demostración de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner.

Ficha de análisis documental

El 51,28% del total de los estudiantes se ubican en el nivel 1, el 41,03% del total de los estudiantes se ubican en el nivel 2 y el 7,69% de los estudiantes se ubican en el nivel 3, del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

En el nivel 1. Correspondiente al indicador, identifica rectas tangentes, en el cuaderno de trabajo, se observó que los puntos de tangencia no están ubicados en el lugar de intersección, este error no ha sido corregido por el docente, además se ha observado que en la gráfica de rectas tangentes la medida está igual y cuando se realiza la medición son diferentes, estos errores identificados si no es corregido oportunamente, tendremos estudiantes que rechazan la matemática; referente al indicador, aplica el teorema de tangente, en el cuaderno se evidenció problemas resueltos e inclusive con gráficos, si realmente comprobamos la construcción de la recta tangente con el radio del círculo, no son perpendiculares, entonces se piensa que el docente está desarrollando una matemática orientado a almacenar conocimientos; con respecto al indicador, identifica los puntos de tangencia, se observó en el cuaderno de trabajo que no hay estudio referente al punto de tangencia, por ello en sus graficas no están ubicados de manera correcta, porque al trazar la perpendicular al punto de tangencia no pasa por el centro.

En el nivel 2. Correspondiente al indicador identifica figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, las gráficas que hay en sus cuadernos, no les permiten diferenciar cuando una figura es circunscrita y cuando no, porque en muchas gráficas observadas los lados del polígono, no son tangentes a la circunferencia; referente al indicador, describe las propiedades de cuadriláteros circunscritas a la circunferencia, por la gráfica que muestran no pueden describir las propiedades; referente al indicador, argumenta propiedades de figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, en el cuaderno se observó unas preguntas referida a propiedades de los polígonos circunscritos, la respuesta común es, para que un polígono sea circunscrito a la circunferencia, sus cuatro lados deben chocar a la circunferencia. Esto refleja que el estudiante no entendió el tema.

En el nivel 3. Referente al indicador, establece la relación aritmética del teorema de Pitot, Poncelet y Steiner, en la mayoría de los cuadernos, se observó que la gráfica está correcto, con representaciones respectivas, pero una vez más comprobamos al medir las tangentes obtuvimos medidas diferentes, esto indica que el docente está desarrollando una matemática divorciado de sus objetos matemáticos, sabemos que las propiedades matemáticas están intrínsecas con las figuras geométricos, en el cuaderno de trabajo, esto no ocurre, por ello los estudiantes no comprenden y al establecer la relación aritmética del enunciado de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, memorísticamente expresan, pero si establecen a partir de su propia gráfica se contradicen.

En el nivel 4. Referente al indicador, demuestra los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, en el cuaderno están transcrito la demostración, tal igual que los libros de consulta, pero cuando se solicita la demostración a partir de la gráfica generada por ellos mismos, no muestran desempeños, esta realidad se observó en la prueba de desarrollo.

Guía de entrevista al docente.

El docente mencionó muchas causas de la baja comprensión en el proceso de enseñanza aprendizaje, pero lo que resaltó para esta investigación son las metodologías inadecuadas que el docente ejecuta en el proceso de enseñanza aprendizaje, creemos que es dato suficiente para afirmar la causa de que los estudiantes no desarrollan la comprensión y los resultados en los análisis anteriores presentados, es consecuencia de esta causa.

Las TICs en el proceso de enseñanza aprendizaje, el docente manifestó que la Institución Educativa cuenta con dos aulas de innovación pedagógica, la cual no es utilizada por los docentes, esporádicamente algunos docentes hacen uso y considera al software GeoGebra como un recurso didáctico que pueda ayudar mucho en las actividades educativas, especialmente en geometría, la información del docente es valioso, en el sentido que, ya se cuenta con una fortaleza de la Institución Educativa que bien puede ser utilizada.

Referente a la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, el docente manifestó la importancia de los conocimientos previos, como base para desarrollar los conocimientos nuevos, de la misma forma mencionó los siguientes temas como prerrequisito para comprender los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner; rectas tangentes, teorema de tangente, polígonos circunscrito y exinscrito, desde nuestro punto de vista estamos de acuerdo con el docente y justamente estas consideraciones se están tomando como punto de partida para desarrollar la comprensión de los teoremas en referencia.

Resultados de la triangulación

En el nivel 1. Correspondiente al indicador identifica rectas tangentes: en la prueba mixta se detectó, que el estudiante reconoce como recta secante, reconoce por los puntos que chocan, de la misma forma en la prueba de desarrollo, se identificó que los estudiantes reconocen a la recta tangente por el punto que chocan, la recta y la circunferencia coinciden en un punto, se intersectan en un solo punto, por otra parte la ficha de análisis documental registra la observación de los cuadernos de trabajo, donde los puntos de tangencia no están ubicados en el lugar de intersección correspondiente.

Con respecto al indicador, aplica el teorema de tangente, en la prueba mixta reconocen las rectas tangentes que son iguales, pero en la prueba de desarrollo las medidas de las rectas tangentes son diferentes, también la ficha de análisis documental, muestran que en los cuadernos de trabajo las rectas tangentes están representados como medidas iguales y al medir sus graficas del cuaderno las rectas tangentes trazadas desde el punto exterior a la circunferencia son diferentes, esta realidad muestra, que los estudiantes no comprendieron el teorema de tangente.

Con respecto al indicador identifica los puntos de tangencia, en la prueba mixta se detectó que confunden con puntos de intersección, en las gráficas se han observado que no están ubicando el punto de tangencia correctamente, igual se observó en el cuaderno de trabajo.

En el nivel 2. Respecto al indicador, identifica figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, en la prueba mixta se observó que los estudiantes no reconocen las figuras circunscritas y exinscritas a la circunferencia, en la prueba de desarrollo se observó que no grafican correctamente la circunscripción de las figuras, por esta razón no pueden identificar y la ficha de análisis documental muestran que en el cuaderno las gráficas observadas no les ayudan diferenciar, cuando una figura es circunscrita y exinscrita a la circunferencia.

Respecto al indicador, describe propiedades de figuras geométricas exinscritas a la circunferencia, en la prueba mixta responden, no entiendo lo que es exinscrito, describen que un cuadrilátero está exinscrito a la circunferencia cuando sus lados no chocan con la circunferencia, del mismo modo en la prueba de desarrollo, se observa que la gráfica no está construida de acuerdo a los tópicos, de allí lo estudiantes no pueden describir las propiedades de figuras exinscrita y circunscritas.

Respecto al indicador, argumenta propiedades de figuras geométricas circunscritas a la circunferencia, los estudiantes tienen dificultad en argumentar las propiedades porque las gráficas construidas realmente no representan figuras circunscritas.

En nivel 3. Referente al indicador, establece la relación aritmética del teorema de Poncelet, Pitot y Steiner, en la prueba mixta la mayoría no pudieron establecer la relación aritmética del enunciado de los teoremas, a pesar de que las medidas estuvieron en la gráfica, esto porque no entienden el enunciado de los teoremas, en la prueba de desarrollo muestran que nadie establecieron la relación aritmética, porque sus gráficas representan medidas diferentes de las rectas tangentes, este problema se muestra en los cuadernos de trabajo, según el reporte de la ficha de análisis documental.

En el nivel 4. Referente al indicador, demuestra los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, en la prueba mixta se pudo identificar que en su totalidad no pudieron iniciar la demostración de los teoremas, de igual forma en la prueba de desarrollo la mayoría de los estudiantes no pudieron demostrar los teoremas, la ficha de análisis documental reporta, que en el cuaderno de trabajo se muestra la demostración copia y fiel de los libros.

En la propuesta se modelará la estrategia desde el nivel 1, trabajando mucho para la adquisición de un lenguaje matemático, reconocimiento de figuras por sus elementos y características matemáticas, la precisión de la construcción de rectas tangentes, la precisión en la construcción de polígonos circunscritos y exinscritas acorde a las pautas establecidas, esto con una metodología interactiva y la aplicación de una estrategia con un respaldo teórico.

Desde el análisis cualitativo del guía de entrevista para el docente, se concluyó que el docente propone como alternativa, para desarrollar la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, la utilización del GeoGebra como recurso didáctico, por sus bondades en cuanto se refiere a la precisión y la combinación perfecta del algebra y geometría. Precisamente en los objetivos se considera al GeoGebra como recurso didáctico.

Propuesta de Solución

La estrategia didáctica para la comprensión y aplicación de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, orientado por el modelo Van Hiele y el GeoGebra, fue diseñado con el propósito de desarrollar actividades orientado hacia la comprensión de los teoremas y propiedades geométricos en los estudiantes, por otra parte se considera como una herramienta didáctica valiosa para el docente. Con lo cual contribuiremos en la mejora de los problemas de comprensión identificados en el trabajo de campo y en la mejora de la calidad educativa.

La estrategia didáctica propuesta en esta investigación considera la aplicación de los niveles y fases del modelo Van Hiele y el uso del GeoGebra como recurso didáctico, para la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner.

En este propósito la estrategia didáctica se compone de dos momentos; en el primer momento se elabora un plan de taller del software GeoGebra dirigido a los docentes y estudiantes, con la finalidad de cumplir la génesis instrumental para el dominio del software GeoGebra, el segundo momento es referido al diseño de la estrategia didáctica, donde se establecen las actividades orientados en desarrollar los temas prerrequisitos para la comprensión de los teoremas en referencia, las cuales son; rectas tangentes, teorema de tangente, polígonos circunscritos y exinscritos a la circunferencia, de la misma forma las actividades orientadas para la comprensión y aplicación de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner.

Plan del taller "Introducción al GeoGebra"

Este taller se diseña para tres sesiones, la primera sesión, denominada "Conociendo el GeoGebra", se considera tres actividades, tanto para los docentes y estudiantes: la actividad 1, tiene por objetivo que el estudiante y los docentes conozcan la barra de herramientas del software GeoGebra, y las funciones que cumple cada una de ellas; la actividad 2, tiene por objetivo a que los estudiantes y los docentes realicen construcciones sencillas como circunferencias, líneas tangentes, bisectrices, puntos medios y perpendicularidad; la actividad 3, está estructurada para que los estudiantes y los docentes trazan rectas tangentes a la circunferencia desde un punto exterior, ubican los puntos medios de los lados del triángulo y trazan la perpendicularidad, trazan las bisectrices de los ángulos del triángulo.

La segunda sesión, denominada "Construcciones con GeoGebra", está dirigida a los docentes y estudiantes. Se considera tres actividades: la actividad 1, construcción de un cuadrilátero circunscrito; la actividad 2, construcción de un triángulo rectángulo circunscrito a la circunferencia y la construcción de un triángulo cualesquiera circunscrito a la circunferencia; la actividad 3, construcción de un cuadrilátero exinscrito a la circunferencia.

La tercera sesión, denominada "Comprendiendo los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner con GeoGebra", está dirigida sólo a los docentes. Se considera tres actividades: actividad 1, estudio analítico con GeoGebra del teorema de Pitot y la ampliación; actividad 2, estudio analítico con GeoGebra del teorema de Poncelet, ampliación y aplicación; actividad 3, estudio analítico del teorema de Steiner, consecuencia y aplicación.

Las sesiones programadas se desarrollarán con los estudiantes en horas extracurriculares, con los docentes se realizará en los talleres del círculo de estudios, faltando una semana para desarrollar los temas propuestos.

Muestra de las actividades desarrolladas

Las actividades que forman parte de la estrategia didáctica para la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, orientados por el modelo Van Hiele y el software educativo GeoGebra, se diseñaron bajo el enfoque constructivista, la organización es guiada por las Rutas de Aprendizaje 2015 del VII ciclo.

Actividad 1.

Título: *Trazamos las rectas tangentes con GeoGebra y comprendamos el teorema de tangentes.*

En la Tabla 1 se muestran los aprendizajes esperados con la actividad y los indicadores de desempeño.

Tabla 1.

Aprendizajes esperados y los indicadores de desempeño.

APRENDIZAJE ESPERADO	INDICADOR DE DESEMPEÑO
Identifica rectas tangentes a la circunferencia	Grafica rectas tangentes a la circunferencia con GeoGebra y realiza un discurso de sus propiedades. Utilizando un lenguaje matemático. Diferencian la recta tangente con la recta secante a partir de la gráfica realizada con el GeoGebra.
Identifica los puntos de tangencia entre la recta y circunferencia	Diferencias el punto de intersección con el punto de tangencia.
Justifica el teorema de tangente	Justifica el teorema de tangente Justifica el teorema de tangente con GeoGebra

Desarrollo de la secuencia didáctica

Fase 1: Información.

Los estudiantes cumpliendo la iniciación del software, grafican con el GeoGebra las siguientes figuras; un punto, una recta, una circunferencia, dos rectas secantes.

Luego de esta actividad, el docente presenta la siguiente lámina didáctica y plantea las siguientes interrogaciones: ¿Qué diferencias observan en cada uno de ellos?

Los estudiantes anotan las diferencias identificadas, tres estudiantes voluntarios explican las posibles diferencias identificadas.

Teniendo en cuenta las diferencias identificadas por los estudiantes, el docente plantea las siguientes interrogaciones:

¿La figura I qué representa? ¿La figura II qué representa?

¿La figura III de la lámina didáctica, qué representa y cuál es la denominación del punto B?

¿La figura IV de la lámina didáctica, que representa?

¿Los segmentos BC y BD de la gráfica IV, son iguales o diferentes?

Al respecto los estudiantes realizan comentarios breves.

Fase 2: Orientación dirigida.

Cumpliendo con la exploración del software, los estudiantes grafican la figura III de la lámina didáctica. Sin utilizar el manual del GeoGebra.

Las gráficas posibles obtenidas por los estudiantes pueden resultar como se muestra en la Fig. 2.

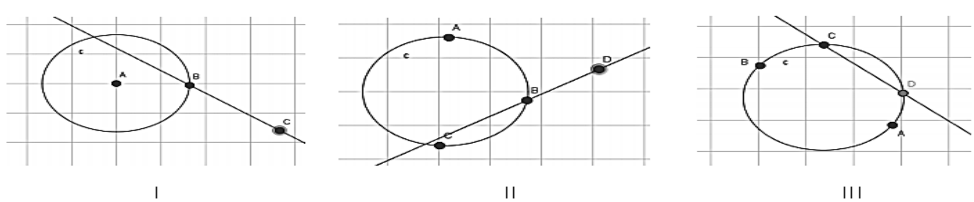

Fig. 2. Gráficas posibles a obtener por los estudiantes

Fase 3. Explicitación.

Los estudiantes socializan las gráficas que obtuvieron, describiendo cada uno de ellos.

Ahora el docente solicita que grafiquen la figura III, utilizando el manual del GeoGebra.

La gráfica que se obtiene utilizando el manual podría resultar como muestra la Fig. 3

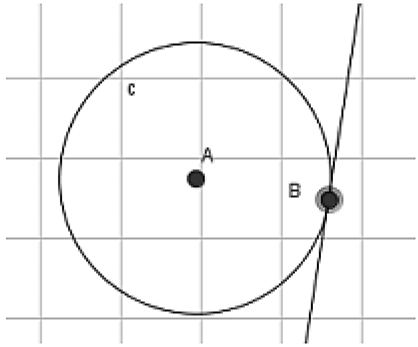

Fig. 3 Gráfica utilizando el manual del GeoGebra

Ahora los estudiantes trasladan el punto de intersección por la circunferencia y comparan con la experiencia anterior.

A partir de la experiencia anterior, el docente plantea la siguiente interrogación.

¿Qué denominación recibe la recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto y qué nombre recibe el único punto de intersección?

Para responder a esta pregunta, los estudiantes buscan información del texto del Ministerio de Educación.

Con la intervención de todos los participantes, la información organizada debe quedar de la siguiente manera:

La gráfica I, II y III de la actividad anterior representan rectas secantes a la circunferencia, porque la recta intersecta en dos puntos.

La gráfica obtenida con el manual, representa la recta tangente a la circunferencia y el punto de intersección es el punto de tangencia.

El punto de tangencia se origina cuando la recta es tangente a la circunferencia u otra curva, en el resto de delos casos son puntos de intersección.

Fase 4. Orientación libre.

Con la finalidad de realizar el refuerzo instrumental, el docente solicita a cada estudiante, que grafiquen con el GeoGebra, la gráfica IV de la lámina didáctica presentada, utilizando el manual de GeoGebra.

El docente indica a cada estudiante, que deben medir los segmentos obtenidos del punto exterior al punto de tangencia y comentan el resultado obtenido.

El estudiante con la ayuda del texto del Ministerio de Educación, determinan el teorema que estudia a la gráfica obtenida.

Quedando la información organizada de la siguiente manera:

Teorema de Tangente: Las rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son iguales.

Fase 5. Integración.

Los estudiantes finalizan respondiendo las interrogaciones planteadas en la fase información:

¿La figura I, qué representa?

La intersección de dos circunferencias en dos puntos

¿La figura II qué representa?

La recta secante a la circunferencia, porque intersecta en dos puntos a la circunferencia

¿La figura III de la lámina didáctica, qué representa y cuál es la denominación del punto B?

La recta tangente a la circunferencia, el punto B es el punto de tangencia.

¿La figura IV de la lámina didáctica, que representa?

Dos rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia.

¿Los segmentos BC y BD de la gráfica IV, son iguales o diferentes?

Los segmentos BC y BD son iguales, por el teorema de tangentes.

La evaluación es permanente durante el proceso del desarrollo de las fases del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, esta se ejecuta con la finalidad de comprobar los siguientes desempeños:

– Los estudiantes identifican rectas tangentes, por punto de tangencia.

– Los estudiantes diferencien gráficamente y en forma discursiva rectas secantes de rectas tangentes.

– Justificar gráficamente y en forma discursiva el teorema de tangente.

Los ítems de la prueba, son diseñados teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el trabajo de campo. Con la finalidad de realizar el seguimiento del logro de la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, la rúbrica de evaluación permite ubicar al estudiante al nivel de razonamiento geométrico del modelo Van Hiele y al grado de adquisición del nivel que logra. La perspectiva de esta propuesta, es que los estudiantes logren al término década clase prioritariamente el nivel 3 y si amerita el buen trabajo del docente lograr el nivel 4, que en últimas instancias es logro esperado en esta investigación.

Conclusiones

La comprensión es entendida como un proceso mental, porque en sus inicios crea imágenes de conceptos que quiere transmitir, además la comprensión es entendida como desempeño flexible, porque al comprender se muestra habilidades tales como; relacionar, operar, describir, comparar, diferenciar, adecuar, relatar, diagramar, analizar, decidir, representar, secuenciar, organizar.

La estrategia didáctica es conceptualizada como un conjunto de actividades, conjunto de prácticas pedagógicas, métodos y recursos que se selecciona con la finalidad de llevar a cabo un proceso de enseñanza aprendizaje, la articulación de los elementos mencionados en esta investigación se realiza desde el enfoque constructivista, para lo cual la propuesta se orienta desde el modelo der razonamiento geométrico de Van Hiele y el GeoGebra.

Los instrumentos aplicados permitieron identificar el nivel de comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, cuyos resultados confirman que la mayoría de los estudiantes se ubican en el nivel 1 del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele, con un grado de adquisición intermedia, en el resto de los niveles tienen un grado de adquisición baja y en el nivel 4 tienen un grado de adquisición nula.

La triangulación permitió identificar regularidades de las respuestas de los estudiantes donde un porcentaje mayor de los estudiantes, identifican las rectas tangentes utilizando un lenguaje básico como; chocan en un solo punto, la circunferencia y la recta coinciden en un solo punto, consideran a las rectas secantes como rectas tangentes, establecen que las rectas tangentes trazadas desde un punto exterior a la circunferencia son diferentes, Las gráficas de los polígonos circunscritos a la circunferencia no cumplen las propiedades, no establecen las relaciones aritméticas de los enunciados de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, no establecen las relaciones algebraicas a partir de las relaciones aritméticas para la demostración de los teoremas en referencia.

La estrategia didáctica diseñada como solución a la problemática, comprende dos momentos; el primer momento es el taller de introducción al GeoGebra, con la finalidad de familiarizar en el manejo del software tanto a los docentes y estudiantes, y el segundo momento es el desarrollo de las actividades de la estrategia didáctica, donde se articulan las fases y los niveles del modelo Van Hiele y la génesis instrumental del GeoGebra, para consolidar la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner.

El software GeoGebra es un recurso didáctico que facilita la comprensión de los teoremas de Pitot, Poncelet y Steiner, para ello, las actividades de la estrategia didáctica sean elaborados teniendo en cuenta la génesis instrumental, las cuales son; iniciación del software, exploración del software, refuerzo instrumental y simbiosis instrumental, porque el estudiante comprende haciendo.

Notas

[2] Doctor en Ciencias Pedagógicas. Magister en Didáctica del Español y la Literatura. Instituto de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Universidad San Ignacio de Loyola, en Lima, Perú. alejandrocruzatamartinez@yahoo.es

Bibliografía

CORBERÁN, R.; GUTIÉRREZ, A.; HUERTA, M.; JAIME, A.; MARGARIT, J. y PEÑAS, A., et al. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de van hiele.* Madrid: CIDE

FONT, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. Universidad de Barcelona.
Recuperado de: http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2007_10_2_06.pdf

GARCÍA, M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. (Tesis doctoral inédita). Universidad de Almería. Almería. España.
Recuperado de: http://archive.geogebra.org/en/upload/files/Tesis_MariadelMarGarciaLopez.pdf.

GUIN, D. y TROUCHE, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195 – 227

HIELE, V. (1957). El problema de la comprensión: En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. Holanda.
Recuperado de: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/VanHiele57.pdf

JAIME, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de Razonamiento (tesis doctoral). Universidad de Valencia. Valencia, España.
Recuperado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf.

MAGUIÑA, A. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo Van Hiele. (Tesis inédita de grado académico de magister en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Perú

Ministerio de Educación MINEDU (2015) *Rutas de Aprendizaje.* Perú.

PÉREZ, C. y EUGENIA, M. (2010). Estrategias lúdicas aplicando el modelo de Van Hiele como una alternativa para la enseñanza de la geometría. (Tesis inédita de grado publicado). Universidad de los Andes. Bolivia.
Recuperado de: http://tesis.ula.ve/pregrado/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=2151

SANTOS, E. (2014). El modelo de Van Hiele para el Aprendizaje de los elementos de la circunferencia en estudiantes de segundo de secundaria haciendo uso del GeoGebra. (Tesis inédita de grado). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Perú

TROUCHE, L. (2003). From artifact to instrument: Mathematics teaching mediated by Symbolic calculators. *Interacting with Computers*, 15(6), 783 -800

VÁSQUEZ, H. (2013). Uso de Geometría dinámica en la escuela secundaria. (Tesis inédita de grado). Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado de: http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/vazquez_2014.pdf.

VELAZCO, M. y MOSQUERA. (2013.). *Estrategias Didácticas para el Aprendizaje Colaborativo*. PAIEP.